EXAMEN EXTRAORDINARIO DE PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA I
JULIO 2014

Realizar las preguntas en hojas separadas, indicando explícitamente todas las fórmulas que se utilicen.
Tanto el alumno que copie como el que se deje copiar no podrá examinarse hasta julio de 2015.

Duración de cada parte: 50 minutos. El test de la UD 1 se entrega aparte.

Parte 1: UNIDADES DIDÁCTICAS 2 Y 3. Probabilidades con Sucesos y Variables Aleatorias.

1. En el nivel 5 del juego de Dragon City © se pueden criar dos tipos de dragones cada vez: de tierra y de agua. El 40 % de las veces está disponible solamente el de tierra y el 60 % solamente el de agua. El tiempo que tarda en eclosionar un huevo de dragón de tierra sigue una distribución exponencial de media 10 minutos. Para el de agua, este tiempo sigue una distribución exponencial de media 12 minutos.

   a) Calcula la probabilidad de que un huevo cualquiera tarde en eclosionar más de 8 minutos.

   b) Sabiendo que el último huevo tardó en eclosionar más de 8 minutos, calcula la probabilidad de que fuera de agua.

2. De lunes a viernes como en el comedor de la Escuela. El tiempo que tardo en comer se distribuye según una Normal de media 30 minutos y desviación típica 4.5. Siempre que tardo más de 35 minutos en comer es porque he coincidido con Mateo.

   a) Calcula la probabilidad de coincidir un día cualquiera con Mateo.

   b) Calcula la probabilidad de que, de los 5 días semanales que como en la Escuela, en 3 de ellos coincida con Mateo.

Parte 2: UNIDADES DIDÁCTICAS 4 Y 5. Inferencia Estadística.

3. El tiempo que tarda Batman en llegar desde la Batcueva al tejado de la comisaría de Gotham sigue una distribución Normal. Batman sabe que el Comisario Gordon le espera 11 minutos justos en el tejado, con lo que ha medido el tiempo que ha tardado las últimas 8 veces en llegar al tejado y ha obtenido los siguientes datos (en minutos):

$$14 \quad 12 \quad 11 \quad 9 \quad 13 \quad 12 \quad 11 \quad 11$$

   a) Construir un intervalo de confianza al 95 % para el tiempo medio en llegar al tejado.

   b) A la vista de dicho intervalo, cuando llega Batman al tejado, ¿suele encontrar al comisario Gordon?

4. Un fabricante de baterías para automóvil nos asegura que la duración de éstas sigue una distribución normal de desviación típica 0.9 años. Una muestra aleatoria de 10 baterías indica una desviación típica de 1.2 años ¿Debemos pensar que realmente la desviación típica de las baterías es superior a 0.9? Utilizad un nivel de significación de 0.05.

   Nota: Recordad que la relación entre la cuasivarianza muestral y la varianza muestral es

$$S^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1}m_2$$

SOLUCIONES AL EXAMEN EXTRAORDINARIO DE PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA I
JULIO 2014

Parte 1: UNIDADES DIDÁCTICAS 2 Y 3. Probabilidades con Sucesos y Variables Aleatorias.

1. Se define la variable aleatoria X =*tiempo que tarda en eclosionar un huevo*. Nos dicen que, según el tipo de huevo, las distribuciones condicionadas son (siendo T = *dragón de tierra* y A = *dragón de Agua*):

$$X|T \sim Exp\left(\frac{1}{10}\right) \qquad\qquad X|A \sim Exp\left(\frac{1}{12}\right)$$

Hay que recordar que en la distribución exponencial el parámetro λ es la inversa de la media, que es lo que nos dan. Además, nos dicen que $P(T) = 0.4$ y $P(A) = 0.6$. Se pide:

a) $P(X > 8)$. Aquí hay que recordar cuál es la función de distribución de la variable aleatoria exponencial:

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Con lo que:

$$\begin{aligned} P(X > 8|T) &= e^{-\frac{8}{10}} = 0.4493 \\ P(X > 8|A) &= e^{-\frac{8}{12}} = 0.5134 \end{aligned}$$

Nos piden aplicar el Teorema de la probabilidad Total:

$$\begin{aligned} P(X > 8) &= P(X > 8|T)P(T) + P(X > 8|A)P(A) = \\ &= (0.4493) \cdot (0.4) + (0.5134) \cdot (0.6) = \\ &= 0.1797 + 0.308 = \\ &= 0.4877 \end{aligned}$$

b) En este apartado se pide aplicar el Teorema de Bayes:

$$\begin{aligned} P(A|X > 8) &= \frac{P[(X > 8) \cap A]}{P(X > 8)} = \\ &= \frac{P(X > 8|A)P(A)}{P(X > 8)} = \\ &= \frac{0.308}{0.4877} = \\ &= 0.63 \end{aligned}$$

2. *a*) La probabilidad de coincidir con Mateo es la probabilidad que que tarde en comer más de 35 minutos. Sea:

$$T = \text{tiempo que tardo en comer un día cualquiera} \sim N(30, 4.5)$$

Por tanto, se tiene que calcular la $P(T > 35)$.

$$\begin{aligned} P(T > 35) &= P\left(\frac{T-30}{4.5} > \frac{35-30}{4.5}\right) = \\ &= P\left(Z > 1.11\right) = \\ &= 1 - P(Z < 1.11) = \\ &= 1 - 0.8665 = \\ &= 0.1335 \end{aligned}$$

Donde $Z \sim N(0, 1)$ y hemos usado la Tabla de la Función de distribución de Z.

b) Se define la variable aleatoria $N =$*Número de días, de* 5*, que coincido con Mateo.* Se tiene que su distribución es Binomial con probabilidad de éxito la probabilidad de coincidir con Mateo, que es $p = 0.1335$.

$$N \sim Bin(5, 0.1335)$$

Se pide:

$$P(N = 3) = \binom{5}{3}(0.1335)^3(1 - 0.1335)^{5-3} = 10(0.1335)^3(1 - 0.1335)^2 = 0.017864$$

Parte 2: UNIDADES DIDÁCTICAS 4 Y 5. Inferencia Estadística.

3. *a*) Nos piden un intervalo de confianza al 95 % para la media μ de la distribución del tiempo que tarda Batman en llegar al tejado. Primero se hacen algunos cálculos con los $n = 8$ datos:

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 93, \qquad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{93}{8} = 11.625$$

$$\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 1097, \qquad s^2 = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{1097 - 8 \times 11.625^2}{7} = 2.2678, \qquad s = 1.5059$$

Partimos de la variable pivote para la media con varianza desconocida:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Pivotando, se pasa de:

$$P\left(-t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

a:

$$P\left(\bar{X} - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{X} - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $\alpha = 0.05$, $\frac{\alpha}{2} = 0.025$ y $t_{7,0.025} = 2.3646$. Sustituyendo, se obtiene el intervalo

$$\left(11.625 \pm (2.3646)\frac{1.5059}{\sqrt{8}}\right) = (10.366, 12.884)$$

Con lo que:

$\mu \in (10.366, 12.884)$ con una confianza del 95 %

b) Al 95 % de confianza sí se puede suponer que Batman se encuentra al Comisario Gordon, ya que el valor 11 se encuentra dentro el intervalo calculado en el apartado anterior.

4. Sea $X =$ *duración de las baterías* una variable aleatoria con distribución Normal. Como la desviación típica es 0.9, la varianza $\sigma^2 = 0.9^2 = 0.81$, así debemos realizar el siguiente contraste unilateral:

$$\left.\begin{array}{rcl} H_0 : \sigma^2 & = & 0.81 \\ H_1 : \sigma^2 & > & 0.81 \end{array}\right\}$$

La medida de discrepancia para este contraste es

$$d = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1} \text{ si } H_0 \text{ es cierta}$$

Necesitamos calcular s^2, como nos dan la desviación típica muestral, se tiene que la varianza muestral es $m_2 = 1.2^2 = 1.44$, y la cuasivarianza muestral es

$$s^2 = \frac{n}{n-1} m_2 = \frac{10}{9} 1.44 = 1.6$$

Sustituyendo, obtenemos

$$\hat{d} = \frac{9 * (1.6)}{0.81} = 17.77$$

Como el contraste es unilateral, necesitamos el valor $\chi^2_{9,0.05}$ para determinar la región de rechazo. Buscando en la tabla correspondiente, $\chi^2_{9,0.05} = 16.919$ y la región de rechazo es $(16.919, +\infty)$. Como $\hat{d} = 17.77 > 16.919$, cae dentro de la región de rechazo y existe evidencia para rechazar H_0 con $\alpha = 0.05$. Por tanto, debemos pensar que la varianza es superior a 0.81, es decir, la desviación típica es superior a 0.9.